ΛΥΣΕΙΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2008

ΘΕΜΑ 1ο

α.

x_i	ν_i
1	5
2	10
3	20
4	2α
5	5
Αθροίσματα	40 + 2α

$$\bar{x} = \frac{5\cdot 1+10\cdot 2+20\cdot 3+2\alpha\cdot 4+5\cdot 5}{40+2\alpha} \Leftrightarrow 3 = \frac{5+20+60+8\alpha+25}{40+2\alpha}$$

$$3 = \frac{110}{40+2\alpha}$$

$$3(40+2\alpha) = 110 + 8\alpha$$

$$120 + 6\alpha = 110 + 8\alpha$$

$$10 = 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 5$$

β.

Για $\alpha = 5$ ο παραπάνω πίνακας γίνεται

x_i	ν_i
1	5
2	10
3	20
4	10
5	5
Αθροίσματα	50

i) Η διάμεσος δ είναι $\delta = \dfrac{25\eta\pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta + 26\eta\pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta}{2} = \dfrac{3+3}{2} = 3$

ii) Η επικρατούσα τιμή M_o είναι η τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα, άρα $M_o = 3$

ΘΕΜΑ 2ο

α.

i) $f'(x) = (x e^x)' = x'e^x + x(e^x)' = 1e^x + xe^x = e^x + xe^x$

ii) $f''(x) = (e^x + x e^x)' = (e^x)' + (xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$

β.

$f''(x) - f'(x) = (2e^x + xe^x) - (e^x + xe^x) = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

γ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f''(x)+f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{xe^x-(2e^x+xe^x)+e^x+xe^x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{xe^x-2e^x-xe^x+e^x+xe^x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{xe^x-2e^x-xe^x+e^x+xe^x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{xe^x-e^x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}e^x=e$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-x}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^3-x)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left[x\left(x+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\right]=1\cdot 2\cdot 2=4$$

β.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2e^{x-1}+2)=2e^0+2=2+2=4$$

γ.

Θα πρέπει να ισχύει $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1) \Leftrightarrow 4=4=-\alpha^2+5\alpha$

$\alpha^2-5\alpha+4=0$

$\alpha=1$ ή $\alpha=4$

δ.

Όταν $x>1$, είναι $f'(x)=(2e^{x-1}+2)'=(2e^{x-1})'+(2)'=2e^{x-1}+0=2e^{x-1}$

Οπότε $f'(2)=2e^{2-1}=2e$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$f'(x)=(4x^3-6x^2+\alpha+2008)'=(4x^3)'-(6x^2)+\alpha'+2008'=$

$=12x^2-12x+0+0=$

$=12x^2-12x$

β.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-12x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
f'	+ 0 − 0 +
f	↗ | ↘ | ↗

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$, και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$

γ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$
το οποίο είναι ίσο με $f(1) = 4\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 + \alpha + 2008 =$
$= 4 - 6 + \alpha + 2008 =$
$= 2006 + \alpha$

δ.

$f(1) = 2009 \quad \Leftrightarrow \quad 2006 + \alpha = 2009 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3$